Движение в поле центральной силы

Поле центральной силы характеризуется тем, что потенциальная энергия частицы в таком поле зависит лишь от ее расстояния r от некоторого центра (силового центра). Законы движения в поле центральной силы образуют фундамент атомной механики: решение общей задачи о движении электронов в атоме опирается в той или иной мере на результаты, относящиеся к движению одной частицы в поле центральной силы.

$$\hat{H} = \hat{T}_r + \frac{\hat{M}^2}{2\mu r^2} + U(r)$$

Коммутация операторов квадрата углового момента и гамильтониана

$$\hat{T}_r\psi + \frac{\hat{M}^2}{2\mu r^2}\psi + U(r)\psi = E\psi.$$

$$\hat{T}_r\psi + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}\psi + U(r)\psi = E\psi.$$

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)\, Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

Вид функции U(r)

$$U(r)_{r \to \infty} = \text{const} = C$$

$$U(r)_{r \to 0} = \frac{A}{r^{\alpha}}, \quad \alpha < 2$$

Данный вид потенциала охватывает весьма широкий круг задач атомной механики. Например движение валентного электрона в поле ядра атома, окруженного оболочкой более близких электронов. Или взаимодействие двух атомов при малых расстояниях.

Исследование решения

$$R(r) = \frac{u(r)}{r}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}u + Uu = Eu.$$

Асимптотическое решение

$$r \to \infty$$

$E > 0$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2u}{dr^2} = Eu$$

$E < 0$

$$k^2 = \frac{2\mu E}{\hbar^2}$$

$$\lambda^2 = -\frac{2\mu E}{\hbar^2}$$

$$u = C_1 e^{ikr} + C_2 e^{-ikr}$$

$$u = C_1 e^{-\lambda r} + C_2 e^{\lambda r}$$

$$R = C_1 \frac{e^{ikr}}{r} + C_2 \frac{e^{-ikr}}{r}$$

$$R = C_1 \frac{e^{-\lambda r}}{r} + C_2 \frac{e^{\lambda r}}{r}$$

Вблизи центра $(r \to 0)$

$$u(r) = r^{\gamma}(1 + a_1 r + a_2 r^2 + \ldots)$$

$[\gamma(\gamma - 1) - l(l + 1)]\, r^{\gamma-2} +$ члены высшего порядка $= 0$

$$R = C_1' r^{l}(1 + a_1 r + a_2 r^2 + \ldots) + C_2' r^{-l-1}(1 + a_1' r + a_2' r^2 + \ldots),$$

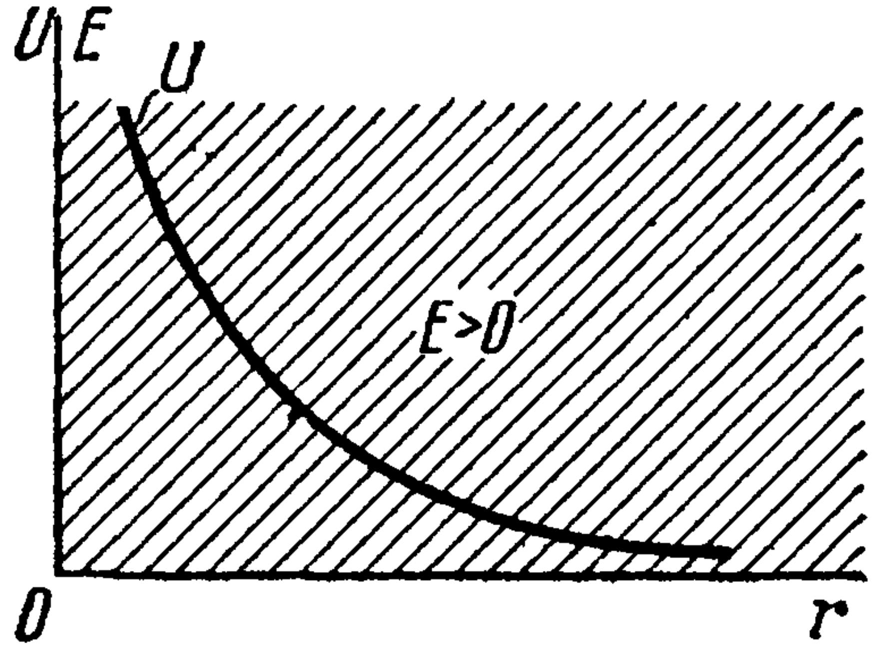
$$R = C_1' r^{l}(1 + a_1 r + a_2 r^2 + \ldots)$$

Непрерывный спектр энергии

$$E > 0$$

$$\frac{C_2}{C_1} = f(E)$$

0 до $+\infty$

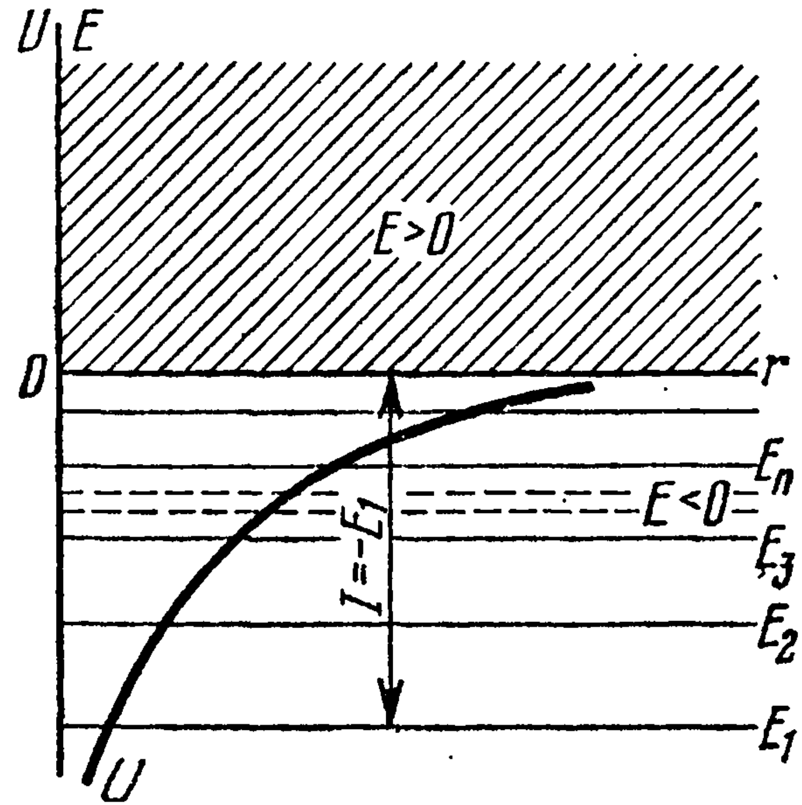


Дискретный спектр

$$E < 0$$

$$\frac{C_2}{C_1} = f(E) = 0$$

$$E = E_1,\ E_2,\ \ldots,\ E_n,\ \ldots$$



Падения частицы на центр

$$U(r) \approx -\beta/r^2$$

$$R'' + \frac{2}{r}R' + \frac{\gamma}{r^2}R = 0 \qquad \gamma = \frac{2m\beta}{\hbar^2} - l(l+1)$$

$$s(s+1) + \gamma = 0$$

$$s_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \gamma}, \quad s_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \gamma}.$$

$\gamma < 1/4$

$\gamma > 1/4$

$s_1 > s_2$.

$$s_1 = -\frac{1}{2} + i\sqrt{\gamma - \frac{1}{4}}, \quad s_2 = s_1^*.$$

$r > r_0$ $\quad R = Ar^{s_1} + Br^{s_2}$

$r < r_0$ $\quad R = C\frac{\sin kr}{r}, \quad k = \frac{\sqrt{\gamma}}{r_0}.$

$r = r_0$ $$\frac{A(s_1+1)r_0^{s_1} + B(s_2+1)r_0^{s_2}}{Ar_0^{s_1} + Br_0^{s_2}} = \sqrt{\gamma}\,\mathrm{ctg}\,\sqrt{\gamma}.$$

$$\frac{B}{A} = \mathrm{const} \cdot r_0^{s_1 - s_2}$$

$$\frac{B}{A} = \mathrm{const} \cdot r_0^{i\sqrt{4\gamma - 1}}$$

$$R = A\frac{1}{r^{|s_1|}}$$

$$R = \mathrm{const} \cdot \frac{1}{\sqrt{r}} \cos\left(\sqrt{\gamma - \frac{1}{4}} \ln\frac{r}{r_0} + \mathrm{const}\right)$$